DIVISIBILIDAD

1. Halle cociente y resto de la división entera de a por b en los siguientes casos:

a) a = 3456 b = 35

b) a = 1898 b = - 41

c) a = - 836 b = 21

d) a = -915 b = - 63

2. Responder las siguientes cuestiones, justificando:

a) Si el cociente y el resto de la división entera entre b y 8 son q y k, respectivamente, ¿cuál es el cociente y el resto de la división por 8 de 8.b – 75?

b) Si el resto de la división entera entre b y 6 es 2, ¿cuál es el resto de la división entre 4.b - 22

3. Represente y resuelva por conjuntos:

a) $\forall$ a, b, c ∈ Z: a | (b + c) => a | b v a | c

b) $\forall$ x, y ∈ Z: x | y ^ y | x => x = y

c) $\forall$ m, n, p ∈ Z: m | n ^ m | p => m | (n – p)

d) $\forall$ x, y, c ∈ Z: x | y => x | c y

e) $\forall$ a, b, c ∈ Z: a ≠ 0 ^ a | (b + c) ^ a | b => a | c

f) $\forall$ x, y, n ∈ Z: x | xy => n | x v n | y

g) $\forall$ a, b, c ∈ Z: a | b v a | c => a | (b + c)

4. Indique, de las siguientes opciones, la que se desprende, necesariamente, de:

A | r ^ a | s en Z – {0}

a) a | (r + s + 1) b) a | (r^2 + 3s + 1) c) a | r^2 + 3s a | r s + 1

5. Halle m.c.d.(a,b) y m.c.m.(a,b) para los siguientes casos y escriba cada uno de los mcd calculados como combinación lineal entera de *a* y *b*:

a) *a* = 224 *b* = 120

b) *a* = 300 *b* = 168

c) *a* = 162 *b* = - 48

d) *a* = 525 *b* = - 124

6. Calcule los enteros *a* y *b* sabiendo que son coprimos y que los cocientes sucesivos de la aplicación del Algoritmo de Euclides para hallar el m.c.d. son: 2, 5,11, 1, 1 y 3 (incluyendo la que da resto cero).

7. Siendo $D_n = \{ x \in N / c \mid n \}$:

a) Halle D_{75}, D_{36} , D_{42}

b) Encuentre el menor número natural n tal que $| D_n | = 8$ y halle un valor de n natural y n >100 tal que $| D_n | = 2$

c) Si consideramos el conjunto de divisores positivos propios de n, es decir todos menos el mismo n: $D^*_n = \{ x \in N / x \mid n \ \wedge \ x < n\}$, halle algún número perfecto sabiendo que se llama así a los que son iguales a la suma de sus divisores positivos propios.

8. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando o demostrando:

a) Es posible hallar dos enteros no coprimos a y b tales que $1 = s\,a + t\,b$, con $s,t \in R$

b) $[\exists\, s,t \in Z / 3 = s\,a + t\,b] \Rightarrow$ m.c.d.(ab) = 3

c) $\forall$ a, b $\in$ N: si a y b son coprimos ^ $c \mid a$ entonces b y c son coprimos

d) $\forall$ a, b $\in$ Z: m.c.d.(2a , 4b) = 4 $\Rightarrow$ m.c.d(a , b)=2

e) $\forall$ a, b $\in$ Z: m.c.d.(a, b) = 1 $\Rightarrow$ m.c.d(a + b , ab)=1

f) $\forall$ a, b $\in$ Z: m.c.d.(a, b) = 1 $\Rightarrow$ m.c.d(a + b , ab)=1

g) $\forall$ a, b $\in$ Z (a >b): m.c.d.(a, b) = 1 $\Rightarrow$ m.c.d(a , a - b)=1

h) Si $a = bq + r$ con $0 \leq r < b$ $\Rightarrow$ m.c.d. (a, b) = m.c.d. (b, r)

i) Sea d= m.c.d. (a, b) $\Rightarrow$ Los enteros $x = a/d$ y $z = b/d$ son coprimos

j) $\forall$ a $\in$ Z: $x = (a + 1)^2$ e $y = a(a + 2)$ son coprimos

UNIDAD 3	DIVISIBILIDAD	2020

① Halle cociente y resto de la división entera de a por b en los sig. casos:

a) $a = 3456$, $b = 35$

$b>0 \to c = ent(3456/35) = 98$, $r = mant(3456/35) \times 35 = 26$ $\leadsto$ $\boxed{c = 98,\ r = 26}$

b) $a = 1898$, $b = -41$

$b<0 \to c' = ent(1898/41) = 46 \to c = -46$, $r = mant(1898/41) \cdot 41 = 12$ $\boxed{c = -46,\ r = 12}$

c) $a = -836$, $b = 21$

$b>0 \to c = ent(-836/21) \overset{-39{,}8}{=} -40 \to r = mant(-836/21) \cdot 21 = 4$ $\boxed{c = -40,\ r = 4}$

d) $a = -915$, $b = -63$

$b<0 \to c' = ent(-915/63) \overset{-14{,}52}{=} -15 \to c = 15$, $r = mant(-915/63) \cdot 63 =$ $\boxed{c = 15,\ r = 30}$

② Responder las sig. cuestiones, justificando:

a) Si el cociente y el resto de la división entera entre "b" y 8 son q y k, respectivamente, ¿cuál es el cociente y el resto de la división por 8 de 8b − 75?

x enunciado: $b = 8q + k \to \boxed{8b = 8(8q + k)}$

tengo: $a = -75$ y $b = 8 \to q_1 = ent(-75/8) = -10$, $k_1 = 5$

$\leadsto \boxed{8b - 75} = \underbrace{8(8q + k)}_{\text{coef de } 8b} + \underbrace{8 \cdot (-10)}_{\text{coef.}} + \underset{\uparrow \text{resto}}{5} =$

$= 8(\underbrace{8q + k - 10}) + 5$

$\boxed{\begin{array}{l} c = 8q + k - 10 \\ r = 5 \end{array}}$

b) Si el resto de la división entera entre "b" y 6 es 2 ¿cuál es el resto de la división entre 4b − 22 y 3?

$q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$

x enunciado: $b = 6q_1 + 2 \to 4b = 24q_1 + 8$

$-22 = 3q_2 + r_2 = \underbrace{3(-8) + 2}$

$\to 4b - 22 = \overset{3 \cdot 8}{24}q_1 + 8 + 3(-8) + 2 = 3(8q_1 - 8) + \overset{+10 = 9+1}{9 + 1} =$

$= 3(8q_1 - 8 + 3) + 1 = 3(\underbrace{8q_1 - 5}_{c}) + \underbrace{1}_{r}$

$\boxed{r = 1}$

③ Analice la validez de las sig. proposiciones, demostrando o justificando:

a) $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}: a \mid (b+c) \Rightarrow a \mid b \vee a \mid c$

$\boxed{F}$ $a=5,\ b=7,\ c=3 \rightarrow 5 \mid 10$ pero $5 \nmid 7$ ni $5 \nmid 3$

b) $\forall x,y \in \mathbb{Z}: x \mid y \wedge y \mid x \Rightarrow x = y$

$\boxed{F}$: $x \mid y \rightarrow y = x k_1$ $\quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

$y \mid x \rightarrow x = y k_2 = x k_1 k_2 = x \xrightarrow{x \neq 0} 1 = k_1 k_2$ $\nearrow k_1 = k_2 = 1$ $\searrow k_1 = k_2 = -1$

$\therefore x = y \vee x = -y$

c) $\forall m,n,p \in \mathbb{Z}: m \mid n \wedge m \mid p \Rightarrow m \mid (n-p)$

$\boxed{V}$ $m \mid n \rightarrow n = m k_1$, $m \mid p \rightarrow p = m k_2$ $\Big\}$ $n - p = m k_1 - m k_2 = m \overbrace{(k_1 - k_2)}^{k_3}$

$\rightarrow n - p = m \cdot k_3 \rightarrow \boxed{m \mid n-p}$ ✓

d) $\forall x,y,c \in \mathbb{Z}: x \mid y \Rightarrow x \mid cy$

$\boxed{V}$: $x \mid y \rightarrow y \overset{hip}{=} x \cdot k_1$, $x \mid cy \rightarrow cy = x k_2$ $\quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

$c(y) \overset{hip}{=} c \cdot (x k_1) = x \underbrace{(c k_1)}_{k_2} = x k_2$

e) $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}: a \neq 0 \wedge a \mid (b+c) \wedge a \mid b \Rightarrow a \mid c$

$\boxed{V}$ hip $a \mid b+c \rightarrow b + c = a k_1 \rightarrow \overbrace{c = a k_1 - b}^{hip 1}$ $\quad a \mid b \rightarrow \overbrace{b = a k_2}^{hip 2}$

$a \mid c \rightarrow c = a k_3$. $\quad c \overset{hip 1}{=} a k_1 - b \overset{hip 2}{=} a k_1 - a k_2 = a \underbrace{(k_1 - k_2)}_{k_3}$

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

$c = a k_3 \rightarrow a \mid c$ ✓

f) $\forall \cancel{x}, \cancel{y}, n \in \mathbb{Z}: n \mid xy \Rightarrow n \mid x \vee n \mid y$

$\boxed{F}$ $n = 6,\ x = 3,\ y = 4,\ 6 \mid \overset{12}{3 \times 4}$ pero $6 \nmid 3$ y $6 \nmid 4$

g) $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}: a \mid b \vee a \mid c \Rightarrow a \mid b+c$

$\boxed{F}$ $a = 2$ $\quad 2 \mid 4$ pero $2 \nmid 4+3$

$b = 4$

$c = 3$

(4) Indique, de las sig. opciones, la que se desprende necesariamente de:

$a|r \wedge a|s$ en $\mathbb{Z}-\{0\}$

a) $a|(r+s-1)$ b) $a|(r^2+3s+1)$ c) $a|r^2+3s$ d) $a|rs+1$

Contraejemplos: $a=2$, $r=4$, $s=6$

a) $r+s-1=9$, $2 \nmid 9$
b) $r^2+3s+1=35$, $2 \nmid 35$
c) $rs+1=25$, $2 \nmid 25$

c) $a|r \rightarrow r=ak_1$: hip 1 tesis: $a|r^2+3s$
$a|s \rightarrow s=ak_2$: hip 2 $\boxed{r^2+3s=ak_3}$

Dem: $r^2+3s \overset{hip 1}{=} (ak_1)^2+3s \overset{hip 2}{=} a^2k_1^2+3.ak_2=a(\underbrace{ak_1^2+3k_2}_{k_3})$

$r^2+3s=ak_3 \rightarrow a|r^2+3s$ ✓

---

(5) Halle m.c.d.(a,b) y m.c.m (a,b) para los siguientes casos y escriba cada uno de los m.c.d calculados como combinación lineal entera de a y b:

a) $a=224$ $b=120$

mcd: $224/120 \Rightarrow c=1$ $r=104$
$120/104 \Rightarrow c=1$ $r=16$
$104/16 \Rightarrow c=6$ $r=8$
$16/8 \Rightarrow c=2$ $r=0$

$\boxed{mcd(224,120)=8}$ ✓

MCM:

224	2
112	2
56	2
28	2
14	2
7	7
1	

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$120=2^3.3.5$
$224=2^5.7$
$=2^5.3^1.5^1.7^1=3360$

$\boxed{mcm[224,120]=3360}$ ✓

b) $a=300$, $b=168$

mcd: $300/168 \Rightarrow c=1$ $r=132$
$168/132 \Rightarrow c=1$ $r=36$
$132/36 \Rightarrow c=3$ $r=24$
$36/24 \Rightarrow c=1$ $r=12$
$24/12 \Rightarrow c=2$ $r=0$

$\boxed{mcd(300,168)=12}$ ✓

MCM:

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

$168=2^3.3.7$
$300=2^2.3.5^2$
$mcm[300,168]=2^3.3.5^2.7=$

$\boxed{mcm[300,168]=4200}$ ✓

c). $a = 162$ $b = -48$

mcd: $162 / -48 \Rightarrow c = -3 \quad r = 18$
$-48 / 18 \Rightarrow c = -3 \quad r = 6$
$18 / 6 \Rightarrow c = 3 \quad r = 0$

$\boxed{mcd(162,-48) = 6}$ ✓

MCM:

162	2	48	2
81	3	24	2
27	3	12	2
9	3	6	2
3	3	3	3
1		1	

$48 = 2^4 \times 3$
$162 = 2 \times 3^4$
$mcm[162,-48] = 2^4 3^4$

$\boxed{mcm[162,-48] = 1296}$ ✓

d) $a = 525$ $b = -124$

mcd: $525 / -124 \Rightarrow c = -4 \quad r = 29$
$-124 / 29 \Rightarrow c = -5 \quad r = 21$
$29 / 21 \Rightarrow c = 1 \quad r = 8$
$21 / 8 \Rightarrow c = 2 \quad r = 5$
$8 / 5 \Rightarrow c = 1 \quad r = 3$
$5 / 3 \Rightarrow c = 1 \quad r = 2$
$3 / 2 \Rightarrow c = 1 \quad r = 1$
$2 / 1 \Rightarrow c = 2 \quad r = 0$

$\boxed{mcd(525,-124) = 1}$ ✓

MCD:

525	3	124	2
175	5	62	2
35	5	31	31
7	7	1	
1			

$124 = 2^2 \cdot 31$
$525 = 3 \times 5^2 \cdot 7$
$mcm = 2^2 \cdot 3 \times 5^2 \cdot 7 \cdot 31$

$\boxed{mcm[525,-124] = 65100}$ ✓

Si son coprimos $(mcd(a,b) = 1)$ entonces $mcm[a,b] = |ab|$

- $\underbrace{(a,b)}_{mcd} \underbrace{[a,b]}_{MCM} = |ab|$

Algoritmo de Euclides

1	0	525	F_1
0	1	-124	F_2
1	4	29	$F_3 = F_1 + 4F_2$
5	21	21	$F_4 = F_2 + 5F_3$
-4	-17	8	$F_5 = F_3 - F_4$
13	55	5	$F_6 = F_4 - 2F_5$
-17	-72	3	$F_7 = F_5 - F_6$
30	127	2	$F_8 = F_6 - F_5$
-47	-199	1	$F_9 = F_7 - F_8$
		0	$F_{10} = F_8 - 2F_9$

$1 = (-47)\,525 + (-199)(-124)$

Mat Discreta UTN 2020

⑥ Calcule los enteros a y b sabiendo que son coprimos y que los cocientes sucesivos de la aplicación del Algoritmo de Euclides para hallar el m.c.d (a, b) son: 2, 5, 11, 1, 1 y 3 (incluyendo la que da resto cero)

	(1)	(2)	(3)	(4)	r
F1	1	0	a	F_1	
F2	0	1	b	F_2	
F3	1	-2	$a-2b$	$F_3 = F_1 - 2F_2$	2
F4	-5	11	$b-5(a-2b) = -5a+11b$	$F_4 = F_2 - 5F_3$	5
F5	56	-123	$a-2b-11(-5a+11b) = 56a-123b$	$F_5 = F_3 - 11F_4$	11
F6	-61	134	$-5a+11b-56a+123b = -61a+134b$	$F_6 = F_4 - F_5$	1
F7	117	-257	$117a-257b$	$F_7 = F_5 - F_6$	1
F8			$-412a+905b$	$F_8 = F_6 - 3F_7$	3

(I) $\boxed{1 = 117a - 257b}$ (II) $\boxed{-412a + 905b = 0}$

Procedimiento (como lo hice yo)

1) conté la cantidad de cocientes dados, le sumé dos (por la matriz identidad) y armé el cuadro!

2) Escribí la matriz identidad en las 2 primeras filas y columnas. Escribí 'a' y 'b' en la columna correspondiente a los números pedidos y Enumeré las filas

3) Anoté los coeficientes dados, fuera del cuadro y llené la fila de "Movimiento de filas" (col. 4), teniendo en cuenta los coef. dados.

4) Operé en las col. (1) y (2) según lo que dice la col. (4) y luego hice lo mismo con la 3° columna

5) Escribí la ecuación como combinación lineal entre a y b (sabiendo que son coprimos). La última fila de la 3° col. da 0 (termina el algoritmo)

6) Con las ecuaciones (I) y (II) armo un sistema de 2 ec. con 2 incógnitas y hallo a y b

$$\begin{cases} 117a - 257b = 1 \\ -412a + 905b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 117 & -257 & 1 \\ -412 & 905 & 0 \end{array}\right) \end{array} \rightsquigarrow \boxed{a = 905, \quad b = 412}$$

7) Siendo $D_m = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \mid m\}$:

a) Halle D_{75}, D_{36}, D_{42}

$$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \rightarrow \boxed{D_{75} = \{1,3,5,15,25,75\}}$$

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \rightarrow \boxed{D_{36} = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}}$$

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \rightarrow \boxed{D_{42} = \{1,2,3,6,7,14,21,42\}}$$

b) Encuentre el menor número natural m tal que $|D_m| = 8$ y halle un valor de m natural y $m > 100$ tal que $|D_m| = 2$

$D_m = \{1,2,3,4,6,8,12,24\} \rightarrow m = 24$

$m > 100 \,/\, |D_m| = 2 \rightarrow D_m = \{1, m\}$ → m primo → $\boxed{m = 101}$ o cualquier otro primo > 100

c) Si consideramos el conjunto de divisores positivos propios de m, es decir: todos menos el mismo m : $D^*_m = \{x \in \mathbb{N} / x \mid m \wedge x < m\}$, halle algún número perfecto sabiendo que se llama así a los que son iguales a la suma de sus divisores positivos propios

$m = 6$ es perfecto pues: $D^*_6 = \{1,2,3\}$ y $1+2+3 = 6$

Mat. Disc. UTN 2020

8) Indique el valor de verdad de los sig. proposiciones, justificando o demostrando:

a) Es posible hallar dos enteros no coprimos a y b tales que $1 = sa+tb$ con $s,t \in \mathbb{Z}$

$\boxed{F}$ El teorema de Bezout dice:

"Dados dos enteros a y b: $mcd(a,b) = 1 \Leftrightarrow 1 = s.a + tb,\ s t \in \mathbb{Z}$

b) $[\exists s,t \in \mathbb{Z} \,/\, 3 = sa + tb] \Rightarrow mcd(a,b) = 3$

$\boxed{F}$ $3 = 3.(2) + (-1)\,3$ pero $mcd(2,3) = 1 \neq 3$

c) $\forall a,b \in \mathbb{N}$: si a y b son coprimos $\wedge$ $c|a \Rightarrow$ b y c son coprimos

$\boxed{V}$ a y b coprimos $\rightarrow 1 = s.a + tb$ $\quad s,t \in \mathbb{Z}$

$c|a \rightarrow a = kc$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 = \underbrace{s.(kc)}_{\in \mathbb{Z}} + tb \therefore mcd(b,c) = 1$

d) $\forall a,b \in \mathbb{Z}: mcd(2a, 4b) = 4 \Rightarrow mcd(a,b) = 2$

$\boxed{F}$ con $a = 4, b = 1 \rightarrow mcd(8,4) = 4$, pero $mcd(4,1) = 1 \neq 2$

f) $\forall a,b \in \mathbb{N}\ (a>b): mcd(a,b) = 1 \Rightarrow mcd(a, a-b) = 1$ $\quad s,t \in \mathbb{Z}$

$\boxed{V}$ $mcd(a,b) \Rightarrow 1 = sa + tb = sa + t(b + a - a) = sa + tb + ta - ta =$

$= \underbrace{(s+t)}_{\in \mathbb{Z}}\, a + (t)(b-a) \Rightarrow mcd(a, b-a) = 1 = mcd(a, a-b)$

e) $\forall a,b \in \mathbb{Z}; mcd(a,b) = 1 \Rightarrow mcd(a+b, ab) = 1$ $\quad s,t \in \mathbb{Z}$

$\boxed{V}$ $mcd(a,b) = 1 \Rightarrow 1 = sa + tb = s(a+b-b) + tb = s(a+b) - sb + tb =$

$= s(a+b) + \underbrace{(-s+t)}_{\in \mathbb{Z}}\, b \Rightarrow \boxed{mcd(a+b, b) = 1}$ (I)

$mcd(a,b) = 1 \Rightarrow 1 = sa + tb = sa + t(b+a-a) = sa - ta + t(b+a) =$

$= (s-t)\, a + t(a+b) \Longrightarrow mcd(a, a+b) = \boxed{mcd(a+b, a) = 1}$ (II)

• si $mcd(a,b) = 1 \wedge mcd(a,c) = 1 \rightarrow mcd(a, b.c) = 1$

$\left\{\begin{array}{l} \text{(I)}\ mcd(a+b, b) = 1 \\ \text{(II)}\ mcd(a+b, a) = 1 \end{array}\right. \rightarrow \boxed{mcd(a+b, a.b) = 1}$

g) Si $a = bq + r$ con $0 \leq r < b \Rightarrow mcd(a,b) = mcd(b,r)$

$\boxed{V}$ x Algoritmo de Euclides: $mcd(a,b) = mcd(b,r)$

Para buscar el m.c.d:

$$a/b \Rightarrow c = c_1 \quad r_1 = r$$
$$b/r \Rightarrow c = c_2 \quad r_2 = r_2$$
$$r/r_2 \Rightarrow c = c_3 \quad r_3 = r_3$$
$$\vdots$$
$$r_{n-3}/r_{n-2} \Rightarrow c = c_{n-1} \quad r_{n-1} = \boxed{r_{n-1}}$$
$$r_{n-2}/r_{n-1} \Rightarrow c = c_n \quad r_n = 0$$

$$mcd(a,b) = mcd(b,r) = mcd(r,r_2) = \dots = mcd(r_{n-3}, r_{n-2}) = r_{n-1}$$

h) Sea $d = mcd(a,b) \Rightarrow$ Los enteros $x = a/d$ y $z = b/d$ son coprimos

$\boxed{V}$ $mcd(a,b) = d \Rightarrow d = sa + tb \Rightarrow \frac{d}{d} = \frac{sa}{d} + \frac{tb}{d} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 = s(a/d) + t(b/d) = sx + tz \Rightarrow \boxed{mcd(x,z) = 1}$$

i) $\forall a \in \mathbb{Z}: x = (a+1)^2 \wedge y = a(a+2)$ son coprimos

$\boxed{V}$

$$\left.\begin{array}{l} x = (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 \\ y = a(a+2) = a^2 + 2a \end{array}\right\} x - y = 1$$

lo reescribo

$$1 = (1)x + (-1)y \Rightarrow \boxed{mcd(x,y) = 1}$$